D'ici à l'infini : Cantor et les nombres transfinis | Par David Soquet

Access the english version of this article

“Il y a trois types de personnes : celles qui savent compter et celles qui ne savent pas.” Si la plaisanterie fonctionne, c’est parce que très peu d’entre eux nous ont la chance de faire la rencontre du troisième type : les personnes qui savent compter jusqu’à l’infini. L’une d’entre elles, le mathematicien allemand Georg Cantor (1845;1918) fut le premier à expliquer ce que cela signifiait vraiment de compter jusqu’à l’infini mais aussi qu’il y avait plusieurs facons de le faire.

I. Les origines de l’infini.

Avant Cantor les mathématiciens en savaient à peine plus sur l’infini qu’un élève de 6e. Le fait est que, dès le plus jeune âge, chaque enfant parvient à saisir assez bien au moins un des aspects de l’infini. Quand il apprend à compter, un enfant comprend vite qu’il n’y a pas de limite à la suite des nombres entiers naturels (les nombres entiers positifs). Il sait qu’après 999 999 vient 1 000 000 de la même facon que 1000 vient après 999, il a juste besoin d’apprendre à nommer les nombres. C’est plus un problème de vocabulaire car une langue est nécessaire pour dire les nombres.

J’enseigne à des élèves de 6e depuis plus de dix ans et je sais qu’ils n’ont aucun problème à imaginer une ligne droite allant à l’infini, un concept pourtant très abstrait. Et quand on leur demande de placer des points régulièrement espacés sur une ligne droite pour représenter des nombres, ils comprennent facilement car ils savent que sur une ligne infinie il y a aura toujours des points disponibles pour des nombres de plus en plus grands. Une infinité pour une autre. En revanche, il semble beaucoup plus difficile pour un élève de 6e de se représenter le nombre infini de points situés entre deux points quelconques formant un segment. Cette infinité intérieure semble plus difficile à cerner que l’infinité extérieure. Il semblerait que le fait que le segment ait des extrémités alors que la ligne droite est sans limite entraine certains élèves à croire qu’une infinité de points ne peut pas être placée, qu’il n’y a pas assez de place. Le problème avec le segment c’est qu’on peut le dessiner complètement et cela le rend concret alors que sa définition est purement abstraite. Pour mieux imaginer l’infinité de points sur un segment, on peut simplement considérer la quantité de nombres décimaux entre 2 et 3. Comme on peut toujours écrire un nouveau nombre décimal compris entre deux nombres décimaux, cette quantité est clairement infinie.

Cette distinction entre l’infinité de points sur une ligne et l’infinité de points « à l’intérieur » d’un segment avait déjà été identifiée par Aristote. Après quelques considérations un peu obscures, Aristote conclut qu’un seul type d’infinité était acceptable, l’infinité potentielle des choses sans limite, comme la ligne droite. Plus précisément, c’est un peu comme si Aristote acceptait que quelque chose soit illimité mais pas que quelque chose contienne une infinité. Le problème pour Aristote était la « co-existence » d’une infinité de choses, ce qu’il appelait l’infini réel.

« Notre récit ne va pas à l’encontre de ce que croient les mathématiciens, en niant l’existence réelle de l’infini […]. Le fait est qu’ils n’ont pas besoin de l’infini et ne l’utilisent pas. Ils postulent seulement qu’une ligne droite peut-être prolongée aussi loin qu’ils le souhaitent. » [1]

Pour faire court, la conséquence de ceci fut que cela a plus ou moins interdit à quiconque de parler de ou de s’intéresser à l’infini pendant près de 2000 ans. D’un autre coté, cela a aussi permis aux mathématiciens de travailler avec la notion d’infini sans vraiment se soucier de sa vraie nature. Pour illustrer ceci, voyons avec quelle simplicité on peut prouver que le nombre 0,999... (avec une infinité de 9) est égal à 1.

(1) X=0.999... (2) 10´X=9.999... (3) 9´X=9 en soustrayant (1) à (2) (4) X=1

[1] Cf. Aristote, *Physique,* Livre 3, §8

La ligne (3) part du principe qu'il y a le même nombre (infini) de chiffres 9 après la virgule dans les deux nombres, ce qui explique leur disparition. En utilisant une méthode similaire, on peut prouver que tout nombre possédant une infinité de chiffres après la virgule formant une série qui se répète est égal à un nombre rationnel (i.e. une fraction). De cette facon 5,42424242... = 537/99. Cela donnait l'impression aux mathématiciens que l'infini pouvait être manipulé.

Un autre exemple de mathématiciens travaillant avec l'infini se trouve dans le développement de l'analyse à la fin du 17e siècle. Leibniz et Newton créèrent séparément leurs méthodes de calcul différentiel et intégral en considérant des quantités infiniment petites sans jamais vraiment les définir précisément.

II. Les problèmes avec l'infini.

Dans plusieurs domaines des mathématiques, on se heurte à de sérieux problèmes lorsqu'on essaie d'étendre certaines règles du fini à l'infini. Pour illustrer ceci, considérons les cent premiers entiers naturels de 1 à 100. La moitié de ces nombres sont pairs. Si on prend plus de nombres, par exemple 10000, alors 5000 d'entre eux sont pairs. Cela amène facilement au résultat suivant :

(1) Il y a deux fois plus de nombres entiers naturels que de nombres pairs.

Et puisqu'il n'y a pas de limite à la suite des nombres entiers, les deux résultats suivants sont également vrais :

(2) Le nombre d'entiers naturels est infini.
(3) Le nombre de nombres pairs est infini.

Ainsi, si l'on prend en compte l'ensemble de tous les nombres entiers, il y a un problème : soit le résultat (1) n'est plus vrai, soit l'infini de (2) est deux fois plus grand que l'infini de (1). Ces deux solutions vont à l'encontre du sens commun.

Un autre exemple légèrement différent est le suivant :

(1') Le nombre de points appartenant au segment [AB] est infini.
(2') Le nombre de points appartenant à la droite (AB) est infini.
(3') Le segment [AB] est inclus dans la droite (AB).

Encore une fois, cause de (3') on peut penser qu'il y a plus de points sur la droite que sur le segment mais alors cela signifierait que le nombre infini de (2') est plus grand que le nombre infini de (1').

La « légère » différence entre ces deux exemples a en fait une grande importance dans notre histoire. C'est la différence entre le discret et le continu. Pour expliquer cela, il suffit à nouveau de considérer les nombres entiers sur une droite graduée. Quand ils sont placés sur une droite graduée, les entiers naturels laissent évidemment des trous puisqu'il n'y a aucun nombre entier entre 1 et 2 ou entre deux entiers consécutifs quelconques. C'est ce qu'on appelle le discret. D'un autre côté, les points d'une droite remplissent complètement la droite, c'est le continu. Au début du 19e siècle, deux questions liées entre elles demeuraient sans réponse.

Quelle catégorie de nombres peut « remplir » la droite graduée sans laisser de trous ?

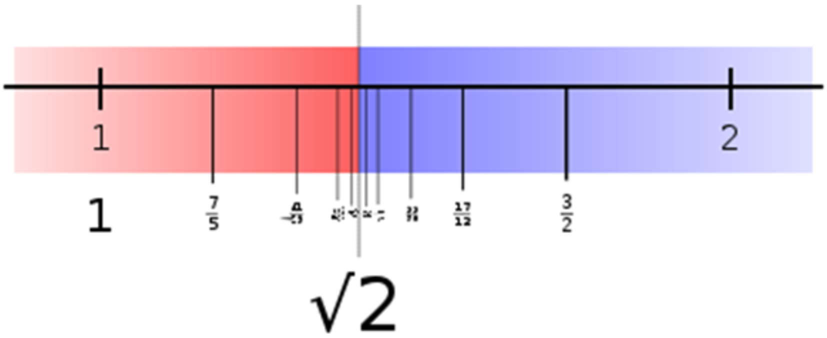
Peut-il y avoir une différence entre deux infinis ?

La première question suggère que différents types de nombres peuvent être placés sur une droite graduée, comme par exemple les nombres rationnels, qui sont définis comme le quotient de deux nombres entiers et sont aussi appelés *fractions*. Tous les nombres rationnels peuvent être placés sur une droite graduée mais cela ne nous avance pas beaucoup. Ce qui est plus intéressant c'est le fait que –contrairement aux nombres entiers– il existe toujours un nombre rationnel entre deux rationnels quelconques. Si $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ sont rationnels, alors le nombre $\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}$, qui représente la moyenne de ces deux nombres, est aussi un nombre rationnel (il peut s'écrire $\frac{ad+bc}{2bd}$ et est donc bien le quotient de deux nombres entiers). Par ailleurs, il se trouve bien entre les deux autres nombres, et plus précisément au « milieu ». En poursuivant le processus, on voit facilement qu'il existe une infinité de rationnels entre deux rationnels quelconques. Est-ce suffisant pour remplir la droite graduée ? Autrement dit, chaque point de la droite graduée peut-il être représenté par un nombre rationnel ? La réponse est non. En fait, comme cela fut découvert par les Pythagoriciens, tous les nombres ne sont pas rationnels. Par exemple, le nombre qui représente la longueur de la diagonale d'un carré dont les côtés mesurent 1, peut facilement être « placé » sur la droite graduée (entre 1 et 2) mais il n'est pas rationnel. Ce nombre qui n'est autre que $\sqrt{2}$ est maintenant appelé nombre irrationnel. Ensemble, les rationnels et les irrationnels forment l'ensemble des nombres réels.[2]

III. Qu'est ce qu'un nombre réel ?

Les nombres réels laissent-ils des trous sur la droite graduée ? Avant de pouvoir répondre à cette question, il était nécessaire de donner une définition claire et précise des nombres réels. C'est exactement ce que fit Richard Dedekind dans un court article publié en 1872, « De la continuité et des nombres irrationnels ». Le vrai génie de Dedekind s'illustre non seulement par le fait qu'il avait compris la nécessité d'une définition rigoureuse des nombres réels mais aussi par la méthode utilisée pour définir quelque chose qui pouvait sembler évident aux autres, et notamment aux mathématiciens habitués à travailler avec la droite graduée. Dedekind définit chaque point d'une droite graduée (disons horizontale) comme l'intersection de celle-ci avec une droite verticale. Si cette intersection est un nombre rationnel (notons le Q) alors la droite graduée se trouve divisée en deux ensembles : les nombres plus grands que Q et les nombres plus petits que Q. La principale difficulté intervient quand l'intersection (la coupure, mot utilisé par Dedekind) n'est pas un nombre rationnel.

Puisque son objectif était de définir les nombres irrationnels, il ne pouvait utiliser le même argument. Cependant, en considérant les nombres dont le carré est inférieur à 2 et les autres, il pouvait clairement définir deux sous-ensembles de nombres et cette coupure pouvait servir de définition au nombre $\sqrt{2}$.



"Ainsi, lorsque nous avons affaire à une coupure produite par aucun nombre rationnel, nous créons un nouveau nombre, un nombre irrationnel, que nous considérons comme complètement défini par cette coupure. […] Dorénavant, par conséquent, à chaque coupure correspond soit un nombre rationnel, soit un nombre irrationnel.

—Richard Dedekind, De la continuité et des nombres irrationnels, Section IV

Né à Brunschvicg, en Allemagne en 1831, Dedekind entra à la fameuse Université de Göttingen en 1850 où il eut l'honneur d'être l'un des derniers étudiants de Gauss. Contemporain d'autres

[2] Cf. D. Soquet, *Une histoire des équations,* www.polysophia.com

grands mathématiciens allemands (tels que Riemann ou Dirichlet), ses résultats en algèbre et en théorie des nombres demeurent très importants de nos jours. Au début des années 1870, Dedekind rencontra également Georg Cantor, l'homme au centre de notre histoire, et devint l'un de ses premiers admirateurs et défenseurs.

IV. Les premiers travaux de Cantor.

A la fin des années 1860, Cantor avait déjà publié plusieurs articles sur la théorie des nombres lorsque son intérêt se porta sur l'analyse. Ses travaux sur les séries trigonométriques (des sommes infinies de fonctions trigonométriques, un sujet qui dépasse le cadre de cet article) l'amenèrent à une définition des nombres irrationnels et le contraignirent aussi à considérer des ensembles infinis. C'est à travers cela qu'il en vint à mettre au point sa théorie des ensembles, une théorie qui allait bouleverser le monde des mathématiques pour toujours. Résumée brièvement, la théorie des ensembles affirme que tout est constitué d'ensembles d'objets et des relations entre ces objets. Par exemple, le nombre de filles dans une classe est un ensemble, de même que le nombre d'étudiants portant des lunettes. Aujourd'hui, nous sommes habitués à parler des fonctions comme des relations entre un ensemble de nombres (un intervalle de nombres réels par exemple) et un autre. La fonction $f: x \longmapsto x^2$ prend un nombre et renvoie son carré, créant ainsi une relation entre des nombres réels et des nombres réels positifs. Cependant, avant de parler d'intervalle de nombres réels, il convient de définir ces derniers, ce que fit Cantor (avec une méthode différente de Dedekind) dans un article publié en 1883.

Par ailleurs, pour expliquer ses découvertes, Cantor mit au point une méthode pour compter un nombre infini d'éléments.

Tout d'abord, Cantor définit le cardinal d'un ensemble comme le nombre d'éléments appartenant à cet ensemble. Par exemple, si l'on considère des ensembles de jours, alors le cardinal d'une semaine est sept. Ce processus d'énumération est assez évident lorsqu'il s'agit d'un nombre fini d'éléments mais, comme on l'a vu, cela peut s'avérer plus délicat lorsque l'on commence les éléments d'un ensemble infini. Le cardinal de l'ensemble des nombres entiers naturels (noté $\mathbb{N}$) est ∞ comme celui de $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels. A-t-on pour autant Card ($\mathbb{N}$) = Card ($\mathbb{R}$)? Pas nécessairement.

Pour expliquer ceci, Cantor avait besoin de trouver une méthode pour comparer les cardinaux de deux ensembles distincts. Cette méthode est de nos jours appelée « correspondance un pour un » ou aussi bijection. Par exemple, l'association lundi rouge, mardi orange, mercredi jaune, jeudi vert, vendredi bleu, samedi indigo, dimanche violet crée une relation entre l'ensemble (fini) des jours de la semaine et l'ensemble (fini) des couleurs de l'arc-en-ciel. Chaque jour est associé à une unique couleur et la même couleur n'est pas associée à deux jours différents. C'est une correspondance un pour un. Encore une fois, cet exemple avec des ensembles finis ne nous aide pas beaucoup car nous savions déjà qu'il y avait sept jours et sept couleurs. Cette méthode est aussi relié au principe des tiroirs de Dirichlet : s'il y avait moins de couleurs que de jours, alors il y aurait forcément au moins deux jours différents associés à la même couleur. Cette méthode peut être utilisée pour comparer des nombres sans compter. En formant des paires d'éléments de chacun des deux ensembles, on peut facilement voir lequel a le plus grand cardinal. C'est d'ailleurs la méthode qu'utilisa Cantor pour savoir quels ensembles avaient le même cardinal que $\mathbb{N}$, en essayant de coupler ses éléments avec la suite des entiers, c'est-à-dire en essayant de mettre en évidence une correpondance un pour un avec cet ensemble et $\mathbb{N}$.

Un exemple plus intéressant est la fonction introduite plus haut qui associe chaque nombre réel à son carré. Etant donné que deux nombres opposés ont le même carré $(-2)^2 = 2^2 = 4$, cette fonction n'est pas une correspondance un pour un entre l'ensemble des réels et l'ensemble des réels positifs. Cela ne signifie pas pour autant que ces deux ensembles n'ont pas le même cardinal car il peut exister une autre fonction réalisant cette correspondance un pour un. Cela ne signifie pas non plus que la fonction carrée ne peut pas réaliser une correspondance un pour un, elle le fait entre entre les intervalles [0;√2] and [0;2]. Cantor a d'ailleurs prouvé que tout intervalle de $\mathbb{R}$ a le même cardinal que $\mathbb{R}$. Autrement dit, la partie est aussi « grande » que le tout.

Avec cette invention, Cantor montre facilement que le paradoxe sur les nombres pairs rencontré précédemment n'a plus lieu d'être. La fonction « doubler » met en place une correspondance un pour un entre les nombres pairs et les nombres naturels : $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 4$, $3 \rightarrow 6$, $4 \rightarrow 8$, $5 \rightarrow 10$ etc… Selon la définition de Cantor, cela prouve que le cardinal de l'ensemble des nombres pairs est égal à Card ($\mathbb{N}$).

Cantor utilisa aussi des correspondances géométriques pour prouver une égalité de deux cardinaux. C'est de cette facon qu'il prouva qu'il y a autant de points dans un carré que sur le côté de ce carré. Mais pour comprendre cette méthode, nous nous intéresserons ici à un exemple plus simple :

Prenons deux cercles C_1 et C_2 concentriques (c'est-à-dire qu'ils ont le même centre, disons O) dont les rayons respectifs sont 1 et 10. Ces deux cercles sont des ensembles infinis de points et la longueur du cercle C_2 est 10 fois plus grande que celle du cercle C_1. Ces deux ensembles ont-ils le même cardinal ?

La réponse est oui et il est assez facile de le prouver. Prenons un point quelconque A sur le cerle C_1 et tracons la demi-droite d'origine O et passant par A. Notons A' le point d'intersection de cette demi-droite avec le cercle C_2. En répétant le procédé, on voit que chaque point du cercle C1 peut être associé à un point (et un seul) du cercle C2, créant ainsi une correspondance un pour un entre les deux ensembles de points. (On voit aussi qu'un procédé inverse associerait chaque point de C_2 à un point de C_1.) Il y a donc "autant" de points sur les deux cercles.

V. Cantor et les nombres transfinis.

Cantor apporta la réponse à notre deuxième question (Peut-il y avoir une différence entre deux infinis ?) dans un article publié en 1874 (« D'une propriété de l'ensemble des nombres réels algébriques »). Pour commencer, il définit le premier nombre cardinal transfini comme étant le cardinal des nombres entiers naturels et il le nomme $\aleph_0$ (de *aleph*, la première lettre de l'alphabet hébreu). Tous les ensembles dont le cardinal $\aleph_0$ sont dits *dénombrables* et cela signifie qu'il existe une correspondance un pour un entre ces ensembles et $\mathbb{N}$. En voici quelques exemples : l'ensemble des nombres premiers, l'ensemble des nombres pairs (avec la bijection présentée ci-dessus) mais aussi, de facon plus surprenante, l'ensemble des nombres rationnels.

La prochaine étape pour Cantor consistait à prouver que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable. On savait déjà, à cette époque, que l'ensemble des nombres réels pouvait être divisé en deux sous-ensembles : l'ensemble des nombres algébriques et celui des nombres transcendants. (Pour en savoir plus, voir l'article sur les équations.)

Cantor prouva d'abord que "*Les nombres algébriques peuvent être écrits selon une suite dans laquelle chaque nombre apparait une seule fois.*", ce qui revient à dire qu'il existe une bijection entre les nombres algébriques et les entiers naturels. Ainsi, l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Le deuxième théorème de Cantor est formulé ainsi : "*Pour toute suite de nombres réels x_1, x_2, x_3, … et tout intervalle [a, b], il existe des nombres de [a, b] qui ne sont pas dans la suite.* »

Et voici la conclusion de Cantor :

« c'est la raison pour laquelle des ensembles de nombres réels formant ce que l'on appelle le continu (tels que, par exemple, tous les réels qui sont ≥ 0 et ≤ 1) ne peuvent pas etre mis en bijection avec l'ensemble (v) [l'ensemble des entiers naturels] ; par conséquent, j'ai mis en évidence la différence entre le continu et l'ensemble de tous les nombres algébriques. »

VI. La méthode de la diagonale.

Quelques années plus tard, en 1891, Cantor proposa une autre preuve de la non-dénombrabilité des nombres réels, en utilisant la désormais fameuse méthode de la diagonale. Pour comprendre celle-ci, nous pouvons considérer des suites infinies de zéros et de uns, telle que : 0 1 0 1 0 1 0 1… etc.

On définit alors l'ensemble S constitué d'une infinité de suites de ce type que l'on note s_1, s_2, s_3, ... L'ensemble S est évidemment dénombrable puisqu'il existe une bijection entre les éléments s_1, s_2, s_3, ... et les entiers naturels.

Maintenant, on écrit ces éléments comme ci-dessous :

s_1 = (**0**, 0, 0, 0, 0, 0, 0, ...)
s_2 = (1, **1**, 1, 1, 1, 1, 1, ...)
s_3 = (0, 1, **0**, 1, 0, 1, 0, ...)
s_4 = (1, 0, 1, **0**, 1, 0, 1, ...)
s_5 = (1, 1, 0, 1, **0**, 1, 1, ...)
s_6 = (0, 0, 1, 1, 0, **1**, 1, ...)
s_7 = (1, 0, 0, 0, 1, 0, **0**, ...)

On créé alors une nouvelle suite s_0 en prenant la suite en diagonale mais en échangeant les 0 et les 1.On obtient alors la suite s_0 = (**1**, **0**, **1**, **1**, **1**, **0**, **1**, ...). En raison de sa construction, la suite s_0 a au moins un chiffre différent de chaque suite de S (le 1er chiffre de s_1, le 2^{e} de s_2 etc… le n^{e} de s_n). Par conséquent, s_0 ne peut pas appartenir à S. On peut en déduire que l'ensemble T de toutes les suites infinies de 0 et de 1 a un cardinal supérieur à celui de S, qui est $\aleph_0$.

Cantor mit en place une bijection entre l'ensemble T et l'ensemble des réels, preuve que ce dernier n'est pas dénombrable.

VII. Le théorème de Cantor et l'hypothèse du continu.

Dans le même article, Cantor démontra le théorème suivant appelé aujourd'hui « Théorème de Cantor ».

"Pour tout ensemble A, l'ensemble de tous les sous-ensembles de A a un cardinal strictement supérieur à celui de A."

L'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble A est appelé ensemble des parties de A et est noté P(A). Si n est le cardinal de A alors celui de P(A) est 2^n . Encore une fois, le théorème est facilement vérifiable pour les ensembles finis. Prenons l'ensemble A={a,b,c}. Les sous ensembles de A sont {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c} (l'ensemble A lui même) et { }, l'ensemble vide. On vérifie facilement que card(A) = 3, card(P(A))= 8 et 2^3=8.

Pour les ensembles infinis, Cantor démontra que l'ensemble des parties d'un ensemble dénombrable est non dénombrable. Par exemple, l'ensemble des parties de l'ensemble des entiers naturels (l'ensemble de tous les sous-ensembles de $\mathbb{N}$) a le même cardinal que $\mathbb{R}$.

On a donc card($\mathbb{R}$)=$2^{\aleph_0}$.

Une dernière question demeure :

Existe-t-il un ensemble dont le cardinal est situé entre celui des entiers naturels et celui des réels ?

Ce problème est maintenant connu sous le nom de hypothèse du continu et il paraissait si fondamental que David Hilbert, l'un des plus grands mathématiciens allemands de l'époque, le placa en premier sur sa liste des 23 problèmes à résoudre au 20^{e} siècle. (Voir article sur Godel.)

Cantor passa plusieurs années à essayer de prouver l'hypothèse qu'il pensait vraie. Selon certains auteurs, cela a pu être une des raisons des dépressions qui l'affectèrent après 1884.

Par une certaine triste ironie, suite à deux résultats dus aux mathématiciens Kurt Godel (en 1940) et Paul Cohen (en 1963), les mathematiciens savent désormais que l'hypothèse du continu ne peut être validée ou invalidée dans le cadre des axiomes actuels de la théorie des ensembles. Cést une proposition indécidable. (Voir articles sur Godel.)

Everything and more… by David Foster Wallace.
http://descmath.com/diag/ancients.html

Wikipedia

http://en.wikipedia.org/wiki/Actual_infinity
http://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor
http://en.wikipedia.org/wiki/Richard_Dedekind
http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor%27s_first_uncountability_proof
http://en.wikipedia.org/wiki/Cantor%27s_diagonal_argument